ECON 2200, Implisitte funksjoner - Handout

Kjell Arne Brekke

February 23, 2012

1 Implisitt gitte funksjoner

Vi kan si

$$\begin{aligned} \text{Variabelen } x \text{ er eksplisitt gitt om vi skriver } x &= 5 \\ \text{Vi sier akkurat det samme, men } x \text{ er implisitt gitt når vi skriver } 3+x &= 8 \end{aligned}$$

Tilsvarende for funksjoner

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x} \text{ Her er } y \textbf{ eksplisitt} \text{ en funksjon av } x \\ xy &= 1 \text{ Her er } y \textbf{ implisitt} \text{ en funksjon av } x \end{aligned}$$

I begge tilfeller ser vi at om $x = 2$ så må $y = 1/2$.

Problem 1 *Skriv y eksplisitt som en funksjon av x når*

$$x + y = 3$$

1. Det gir $y(x) = x - 3$
2. Det gir $y(x) = 3 - x$
3. Det gir $y(x) = \frac{3}{x}$

2 Implisitt derivasjon

Betrakt de to funksjonene

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 \\ g(x) &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Ved å gange ut parantesen i definisjonen av f ser vi lett at

$$f(x) = g(x) \text{ for alle } x$$

Om du tegner grafen til f tegner du automatisk grafen til g.Finner du stigningstallet til den ene funksjonen har du automatisk stigningstallet til den andre. Med andre ord

$$f'(x) = g'(x) \text{ for alle } x$$

La oss ta eksempelet vi startet med igjen. $xy = 1$, og vi så at dette gir y som en funkson av x.

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

eller implisitt som vi opprinnelig skrev det (men nå med markering av at y er en funksjon av x):

$$xy(x) = 1$$

Nå kan vi definere to funksjoner

$$\begin{aligned} f(x) &= xy(x) \\ g(x) &= 1 \end{aligned}$$

og siden $xy(x) = 1$ vet vi da at

$$f(x) = g(x) \text{ for alle } x$$

tegner vi grafen til f så tegner vi automatisk grafen til g, osv. Spesielt vet vi at

$$f'(x) = g'(x) \text{ for alle } x$$

Vi kan så regne ut de to dervierte i tur og orden

$$\begin{aligned} f(x) &= xy(x) \\ f'(x) &= y(x) + xy'(x) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

I tillegg vet vi at de deriverte er de samme

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \text{ for alle } x \\ \text{som betyr } y(x) + xy'(x) &= 0 \;\text{ for alle } x \end{aligned}$$

Den siste ligningen løser vi for $y'(x)$

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}.$$

Problem 2 *Gjennomfør samme regnestykket for funksjonen $y(x)$ implisitt gitt ved ligningen.*

$$x + y(x) = 3$$

Om du vil følge oppskriften ovenfor kalles venstresiden $f(x)$ og høyresiden $g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + y(x) \\ g(x) &= 3 \end{aligned}$$

Deriver så hver av funksjonene $f(x)$ og $g(x)$. Sett til slutt de deriverte like og løs for $y'(x)$.

1. Svaret blir $y'(x) = -1$
2. Svaret blir $y'(x) = 1$
3. Svaret blir $y'(x) = -\frac{3}{x^2}$

3 Implisitt derivasjon med funksjoner av flere variable

Isokvanter

Vi er ute etter en nivåkurve for funksjonen

$$F(x, y)$$

Vi er da ute etter en funksjon $y(x)$ slik at

$$F(x, y(x)) = c$$

Problem 3 *Gjør som ovenfor*

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x, y(x)) \\ g(x) &= c \end{aligned}$$

Deriver f og g, og bruk det til få inne et uttrykk for $y'(x)$

1. Svaret blir $y'(x) = F'_x/F'_y$
2. Svaret blir $y'(x) = -F'_x/F'_y$
3. Svaret blir $y'(x) = F'_y/F'_x$
4. Svaret blir $y'(x) = -F'_y/F'_x$

4 Optimalisering og implisitt derivasjon

Utgangspunktet for implisitt derivasjon er identiteter, og de alle fleste identitetene vi opererer med kommer fra optimalisering. Et problem dere vil møte er maksimering av følgende profitt

$$\pi(x) = px - c(x)$$

Førsteordensbetingelsen (etter en liten omregning) sier her at

$$p = c'(x)$$

Førsteordensbetingelsen gir nå x som en funksjon av p.

$$p = c'(x(p))$$

Vi ønsker nå å si noe om hva som skjer med bedriften sitt valg av kvantum dersom vi endrer prisen, altså $x'(p)$. Vi gjør som ovenfor og deriverer begge sider. (Jeg utelater nå funksjonene $f(p) = p$ og $g(p) = c(x(p))$ og går rett til ligningen $f'(p) = g'(p)$.) Det gir

$$1 = c''(x)x'(p)$$

Og siden det er $x'(p)$ vi er interessert i, så løser vi den

$$x'(p) = \frac{1}{c''(x)} > 0$$

Selv om vi ikke kjenner funksjonen $x(p)$ eksplisitt, så finner vi likevel at når prisen på produktet øker produserer bedriften et større kvantum.

Problem 4 *Hvordan kan vi vite at*

$$\frac{1}{c''(x)} > 0?$$

1. Det følger ikke av matematikken, men er en rimelig forutsetning. Når prisen går opp produserer jo bedriften mer.

2. Det følger av andreordensbetingelsen $\pi''(x) < 0$. Om ikke $\pi''(x) < 0$ kunne vi ikke vite at det et entydig maksimum vi har funnet.

3. Vi må gjøre en tilsvarende implisitt derivasjon av $c'(x)$ for å se det.